PRÀCTICA 0
TRACTAMENT DE DADES EXPERIMENTALS

1 Introducció

La determinació experimental de qualsevol magnitud física (massa, temperatura, voltatge, intensitat ...) es realitza mitjançant aparells de mesura i el posterior tractament de les dades obtingudes. Qualsevol que sigui el grau de complexitat d'una mesura, les dades experimentals que s'obtenen sempre tenen una certa imprecisió que cal saber valorar. El grau d'imprecisió d'aquestes dades es caracteritza amb una quantitat anomenada error experimental. Aquest és el sentit que donem al concepte d'error en ciències experimentals, que no té res a veure amb la idea d'equivocació.

2 Tipus d'error

Encara que les causes dels errors en les mesures experimentals són molt variades, els diferents tipus d'errors es poden classificar en dos grups: els errors instrumentals i els errors accidentals.

2.1 Errors instrumentals

Els errors instrumentals estan directament relacionats amb l'aparell de mesura. Els diferents tipus d'errors instrumentals que presenta tot aparell són els següents:

a) L'**error de resolució** és degut a la precisió intrínseca de l'aparell. Aquest error és inherent a qualsevol mesura i, per tant, inevitable, de manera que no podem assolir resultats amb un error inferior al de resolució. Normalment, el fabricant d'un aparell indica el valor de l'error de resolució, però si no és així se segueix el criteri següent per determinar-lo:

a1) **En els aparells analògics es considera que l'error de resolució és igual a la meitat de la diferència entre dos valors consecutius de l'escala.** A l'exemple de l'amperímetre de la Figura 1 l'error de resolució és de 0.1 A.

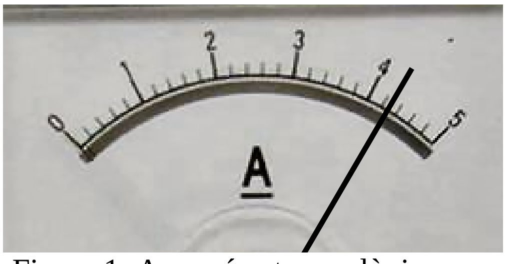

Figura 1: Amperímetre analògic

Figura 2: Amperímetre digital

a2) **En els aparells digitals es considera que l'error de resolució és igual a una unitat en l'últim dígit.** A l'exemple de l'amperímetre de la Figura 2 l'error de resolució és de 0.001 A.

b) L'**error de zero** és el valor que indica l'aparell quan la magnitud mesurada correspon al valor inicial d'escala. Si l'amperímetre de la Figura 1 marquès un valor diferent de 0 quan no circula intensitat, voldria dir que té un error de zero. Alguns aparells permeten corregir aquest error. **En el laboratori de Física del DFEN, l'error de zero de la majoria d'aparells és nul**.

c) L'**error d'escala** és la diferència entre la magnitud mesurada i el valor real a diferents punts de l'escala de mesura. Si l'amperímetre de la Figura 1 no marquès 5 A quan circula un corrent de 5 A, voldria dir que té un error d'escala. Aquest error es determina calibrant l'aparell. **En el laboratori de Física del DFEN, els diferents aparells han estat prèviament calibrats i considerarem que l'error d'escala és nul**.

2.2 Errors accidentals

Quan es repeteix una mesura més d'una vegada en, aparentment, idèntiques condicions, sovint s'observa que els resultats no coincideixen. Si hom pogués controlar tots els factors que incideixen sobre un experiment sempre trobaria el mateix resultat. A la pràctica, però, hi ha una sèrie de factors aleatoris que provoquen desviacions en els resultats d'una mateixa magnitud. Aquestes desviacions introdueixen una incertesa en el resultat final que s'anomena error accidental. L'estimació d'aquest tipus d'error es basa en mètodes estadístics.

En la majoria de mesures que farem els errors accidentals acostumen a ser inferiors a l'error de resolució i no els tindrem en compte. Per tant, si no es diu el contrari, **considerarem que l'error de les mesures serà només el de resolució**.

3 Error absolut i error relatiu

Tenint en compte el que hem comentat a l'apartat anterior queda clar, doncs, que quan mesurem una determinada magnitud, el resultat que obtenim no és un resultat exacte sinó un interval al voltant d'un resultat aproximat. El resultat de la mesura s'acostuma a escriure com

$$x \pm \varepsilon_x$$

on x indica el resultat de la magnitud mesurada que es considera millor i ε_x és un nombre real positiu (amb les mateixes unitats que x) que s'anomena **error absolut**. Aquesta expressió indica que el valor de la mesura està comprès entre $x - \varepsilon_x$ i $x + \varepsilon_x$. Així, per exemple, l'expressió correcte de les intensitats mesurades pels amperímetres de les Figures 1 i 2 és:

Figura 1: I = 4.3 A ± 0.1 A = (4.3 ± 0.1) A

Figura 2: I = (0.198 ± 0.001) A = (198 ± 1)×10^{-3} A = (198 ± 1) mA

Per tal de valorar la qualitat d'una mesura és més convenient utilitzar l'error relatiu. L'**error relatiu** d'una determinada magnitud es defineix com

$$e_x = \frac{\varepsilon_x}{|x|}$$

L'error relatiu és un nombre adimensional que s'acostuma a expressar en tant per cent. Així, per exemple, l'error relatiu de les mesures dels aparells de les figures 1 i 2 són

Figura 1: e_I = (0.1 A)/(4.3 A) = 0.024 o e_I = 2.4%

Figura 2: e_I = (1 mA)/(198 mA) = 0.019 o e_I = 1.9%

4 Expressió d'un resultat experimental

Normalment, l'error s'expressa amb una o dues xifres sense comptar els zeros que indiquen ordre decimal, és a dir, amb una o dues **xifres significatives**. Per exemple, la primera xifra significativa de 0.09641 és el 9 i la segona el 6.

Hi ha tres possibles maneres de suprimir xifres d'una quantitat:

a) **Aproximació per defecte o truncament:** Consisteix a suprimir les xifres sobrants.

b) **Aproximació per excés:** Consisteix a suprimir les xifres sobrants i sumar una unitat a l'última xifra expressada.

c) **Arrodoniment:** Consisteix en truncar o aproximar per excés de manera que el valor arrodonit sigui el més proper al valor previ a l'arrodoniment, la qual cosa es fa d'acord amb el criteri següent:
- Si la xifra d'ordre més alt suprimida és inferior a 5, es trunca
- Si la xifra d'ordre més alt suprimida és superior o igual a 5, s'aproxima per excés

Exemple 3 (si només es volen 4 xifres significatives):

		Truncar	Excés	Arrodonir
12.5598	→	12.55	12.56	12.56
12.5508	→	12.55	12.56	12.55
12.5550	→	12.55	12.56	12.56

L'ERROR SEMPRE S'APROXIMA PER EXCÉS.

Exemples de l'expressió correcta dels errors:

Valor	2 xifres significatives	1 xifra significativa
1.3458	1.4	2
57.763	58	$60 = 6\times10$
0.0276	0.028	0.03
$247000 = 24.7\times10^4$	$250000 = 25\times10^4$	3×10^5
0.0298	0.030	0.03

Una vegada s'ha expressat l'error amb una o dues xifres significatives, el valor de la magnitud mesurada s'expressa de manera que l'última xifra significativa sigui del mateix ordre que la d'ordre més baix a l'error.

EL VALOR DE LA MAGNITUD MESURADA SEMPRE S'ARRODONEIX.

Exemples de l'expressió correcta del resultat d'una mesura:

Magnitud	Error	Expressió correcta
2.5483	1.3458	2.5 ± 1.4
3458.9353	57.763	3459 ± 58
67.8295	0.0276	67.830 ± 0.028
98657320.6	247000	$9866\times10^4 \pm 25\times10^4$
809.4563	0.0298	809.456 ± 0.030

Al laboratori expressarem els errors amb 2 xifres significatives (com a l'exemple).

5. Propagació d'errors

Sovint estem interessats en magnituds que no podem mesurar directament, i, en conseqüència, ens veiem obligats a avaluar-les a partir d'altres magnituds que sí que ho són. Per exemple podem trobar l'àrea d'una moneda a partir de la mesura del seu diàmetre. Aleshores, cal determinar l'error de les mesura indirecta (l'àrea) degut a l'error de la directa (el diàmetre). És a dir, hem de saber com es propaga l'error de la mesura directa a la indirecta.

5.1 Valor i error d'una magnitud funció d'una altra

Suposem que una magnitud z és funció d'una magnitud x mesurable directament, Per exemple, l'àrea de la moneda en funció del seu diàmetre D és $A = \pi(D/2)^2$. Si en la mesura directa de x hem obtingut un valor x_o, amb un error ε_x, llavors la magnitud indirecta, $z_o = z(x_o)$, estarà entre $z(x_o - \varepsilon_x)$ i $z(x_o+\varepsilon_x)$, com es veu a la figura 3.

Si considerem que prop del punt x_o la funció $z(x)$ ve donada aproximadament per la recta tangent a aquesta funció en x_o, això és

$$z(x) \approx z(x_o) + z'(x_o)\cdot(x - x_o)$$

on $z'(x_o)$ és el valor del pendent d'aquesta recta,

és a dir, $z'(x_o)$ és el valor a x_o de $z' = \dfrac{dz}{dx}$

Llavors, els valors de $z(x)$ a $x_o - \varepsilon_x$ i $x_o+\varepsilon_x$ són,,

$$z(x_o+\varepsilon_x) \approx z(x_o) + z'(x_o)\varepsilon_x$$

$$z(x_o-\varepsilon_x) \approx z(x_o) - z'(x_o)\varepsilon_x$$

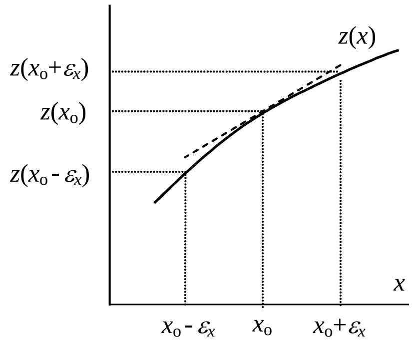

Figura 3

Aleshores diem que l'error estimat de la mesura indirecta z és la semilongitud de l'interval delimitat per aquests dos valors, és a dir,

$$\boxed{\varepsilon_z = \varepsilon_z(x) = \left|\frac{dz}{dx}\right|\varepsilon_x} \qquad (1)$$

<u>Exemple</u>: En la mesura del diàmetre d'una esfera hem obtingut D = 4.5 cm, amb un error total ε_D = 0.3 cm. Quin és el volum de l'esfera?

El volum d'una esfera és $\quad V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{D}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi}{6}D^3 = \dfrac{\pi}{6}(4.5\text{ cm})^3 = 47.713\text{ cm}^3$

i, tenint en compte que[1] $\quad V' = \dfrac{dV}{dD} = \dfrac{\pi}{2}D^2$

tenim $\quad \varepsilon_V = \left|\dfrac{dV}{dD}\right|\varepsilon_D = \dfrac{\pi}{2}D^2\varepsilon_D = \dfrac{\pi}{2}(4.5\text{ cm})^2(0.3\text{ cm}) = 9.543\text{ cm}^3$

Per tant, direm que el volum d'aquesta esfera és

[1] Per fer la derivada dV/dD, identifiquem V amb z i D amb x.

$$V = \frac{\pi}{6}D^3 \;\rightarrow\; \left(\begin{Bmatrix} V = z \\ D = x \end{Bmatrix} \rightarrow z = \frac{\pi}{6}x^3 \rightarrow \frac{dz}{dx} = 3\frac{\pi}{6}x^2 = \frac{\pi}{2}x^2\right) \;\rightarrow\; \frac{dV}{dD} = \frac{\pi}{2}D^2$$

on hem tingut en compte que $\dfrac{d(ax^n)}{dx} = nax^{n-1}$

$$V = (47.7 \pm 9.6)\ \text{cm}^3,$$

on hem expressat l'error amb dues xifres significatives (aproximant per excés), i hem arrodonit el valor de la magnitud V de manera que l'última xifra significativa sigui la d'ordre més baix a l'error.

5.2 Valor i error d'una magnitud funció d'altres

De vegades la magnitud mesurada indirectament z és funció de diverses magnituds (x_1, ..., x_i,..., x_N) que són les que mesurem directament, és a dir,

$$z = z(x_1, ..., x_i,..., x_N)$$

Una magnitud d'aquest tipus seria l'àrea d'un triangle, que es calcula a través de l'expressió $A = bh/2$ on b és la base i h l'altura del triangle.

Per determinar l'error de z s'ha de procedir de la manera següent. Primer, s'ha de calcular l'error originat per cadascuna de les magnituds, x_i, com si la resta de variables fossin exactes, és a dir, com si y només fos funció de x_i i la resta de variables fossin constants. Aquest error, d'acord amb el que hem vist a l'apartat anterior, és

$$\boxed{\varepsilon_z(x_i) = \left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right| \varepsilon_{x_i} \qquad (i = 1, ..., N)} \tag{2}$$

on el símbol $\partial z/\partial x_i$ (que s'anomena derivada parcial de z respecte x_i) indica que estem determinant la derivada de z respecte la variable x_i considerant les altres variables com si fossin constants. Aleshores l'error total d'una magnitud afectada per diversos errors es defineix com

$$\boxed{\varepsilon_z = \sqrt{\varepsilon_z^2(x_i) + ... + \varepsilon_z^2(x_N)}} \tag{3}$$

<u>Exemple</u>: Calculeu l'àrea del triangle, si les mesures de la base (b) i l'altura (h) han donat $b = (10.0 \pm 0.6)$ cm i $h = (6.7 \pm 0.3)$ cm

L'àrea és $\quad A = bh/2 = (10.0\ \text{cm})(6.7\ \text{cm})/2 = 33.50\ \text{cm}^2$

L'error degut a b és[2] $\quad \varepsilon_A(b) = \left|\frac{\partial A}{\partial b}\right| \varepsilon_b = (h/2)\varepsilon_b = (6.7\ \text{cm})(0.6\ \text{cm})/2 = 2.01\ \text{cm}^2$

i el de h és $\quad \varepsilon_A(h) = \left|\frac{\partial A}{\partial h}\right| \varepsilon_h = (b/2)\varepsilon_h = (10.0\ \text{cm})(0.3\ \text{cm})/2 = 1.50\ \text{cm}^2$

Per tant, l'error total és

$$\varepsilon_A = \sqrt{\varepsilon_A^2(b) + \varepsilon_A^2(h)} = \sqrt{(2.01\ \text{cm}^2)^2 + (1.50\ \text{cm}^2)^2} = 2.508\ \text{cm}^2$$

i direm que l'àrea del triangle és

$$A = (33.5 \pm 2.6)\ \text{cm}^2$$

---

[2] Per fer la derivada parcial $\partial A/\partial b$, identifiquem A amb z, b amb x, i considerem $h/2 = a$ constant, i fem

$A = bh/2 \;\rightarrow\; z = c\,x \;\rightarrow\; \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{dz}{dx} = a = h/2$

Per calcular $\partial A/\partial h$, identifiquem A amb z, h amb x, i considerem $b/2 = a$ constant.

5.3 Error de les magnituds que s'expressen com productes i quocients

En els dos casos particulars $z(x) = ax$ i $z(y) = a/y$, si apliquem la fórmula (1) tenim

$$z = ax \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = \left|\frac{dz}{dx}\right|\varepsilon_x = |a|\varepsilon_x = |ax|\,|\frac{\varepsilon_x}{|x|} = |z|e_x \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = |z|e_x$$

$$z = \frac{a}{y} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = \left|\frac{dz}{dy}\right|\varepsilon_y = \left|-\frac{a}{y^2}\right|\varepsilon_y = \left|\frac{a}{y}\right|\frac{\varepsilon_y}{|y|} = |z|e_y \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = |z|e_y$$

on $e_x = \varepsilon_x/|x|$ i $e_y = \varepsilon_y/|y|$ són els errors relatius de x i y. Aleshores, tenint en compte aquests resultats és fàcil veure que quan apliquem la fórmula (2) en el cas d'una magnitud z que depèn de dues variables x i y de la forma

$$z = bxy \quad \text{o} \quad z = b\frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z(x) = |z|e_x \quad \text{i} \quad \varepsilon_z(y) = |z|e_y$$

i la fórmula (3) es

$$\varepsilon_z = \sqrt{\varepsilon_z^2(x) + \varepsilon_z^2(y)} = |z|\sqrt{e_x^2 + e_y^2}$$

6 Regressió lineal

Hi ha un tipus de mesures indirectes una mica diferent del que hem vist anteriorment. Ho explicarem amb un exemple.

La resistivitat ρ d'un material canvia amb la temperatura segons la relació

$$\rho = \alpha\, T + \rho_0$$

on T és la temperatura en graus Celsius i ρ_0 és la resistivitat a 0 ºC. Si volem determinar els valors de α i ρ_0 hem de mesurar la resistivitat ρ a diferents temperatures T. Si mesurem ρ per a N valors diferents de T tindrem un conjunt de N parells de valors (T_i, ρ_i). Teòricament aquests punts haurien d'estar sobre la recta $\rho = \alpha\, T + \rho_0$. A la pràctica, però, si posem els punts (T_i, ρ_i) en un gràfic observem que no estan perfectament alineats (a la gràfica són els punts negres). Això és conseqüència dels errors en les mesures de T i ρ.

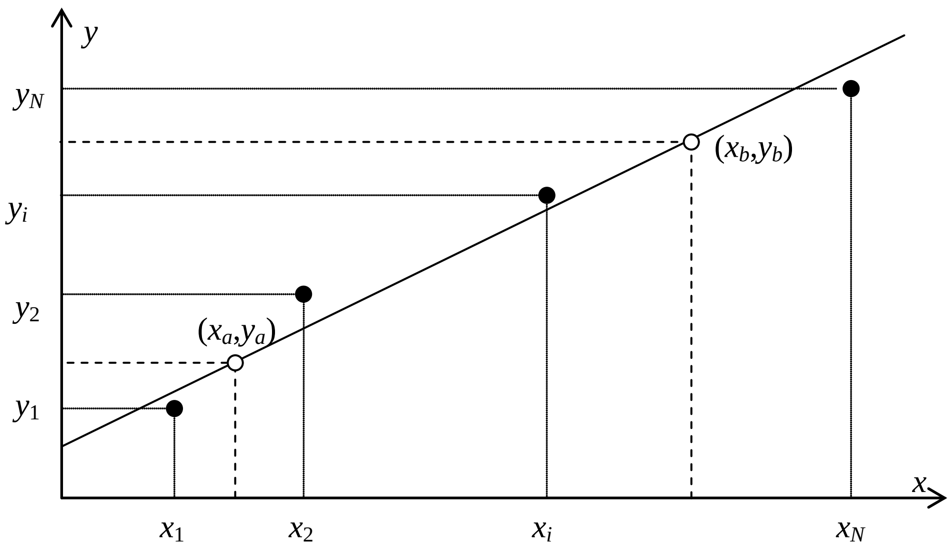

Figura 1: Les x i les y corresponen les T i les ρ, respectivament, de l'exemple.

En el cas general d'una magnitud y (ρ a l'exemple) que és funció d'una altra magnitud x (T a l'exemple) segons una relació lineal

$$y = ax + b$$

si volem determinar els valors de a i b (α i ρ_0 a l'exemple) haurem de mesurar y per a N valors diferents de x, de manera que tindrem N parells de punts (x_i, y_i). Llavors per determinar els valors de a i b tenim dos possibles procediments.

a) **Procediment gràfic**: Dibuixem (amb un regle) una recta que passi el més a prop possible de tots els punts experimentals (els negres a la Figura 1). No cal que la recta passi per cap punt. L'ordenada del punt de la recta que talla l'eix de les y és el terme b,

$$b = y(x = 0)$$

I, a partir de dos punts (x_a, y_a) i (x_b, y_b) de la recta (els blancs), el pendent és

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)}$$

b) **Regressió lineal**: A partir dels N parells de valors (x_i, y_i) apliquem la teoria de la regressió lineal que es fonamenta en el mètode dels mínims quadrats.

Suposem que tenim dues magnituds x i y que podem mesurar directament i entre les quals esperem trobar una relació lineal $y = ax + b$. La qüestió que ens plantegem és com avaluar a i b a partir de diferents mesures de x i y, la qual cosa vol dir trobar quina és la recta que millor ajusta els N punts (x_i,y_i) representats en el pla xy.

Entre les diferents alternatives que tenim, la millor des del punt de vista matemàtic és el **mètode dels mínims quadrats**, que consisteix a fer mínima la suma dels quadrats de les diferències entre l'ordenada del punt experimental i la corresponent a la recta ajustada per a la mateixa abscissa. Per a cada punt experimental (x_i, y_i), aquesta diferència seria

$$\Delta_i = y_i - (ax_i + b)$$

Elevant al quadrat i sumant per a tots els punts experimentals, obtindrem

$$\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2$$

Tenim, doncs, una funció de dues variables. Els valors de a i b que busquem són els que minimitzen $\varphi(a, b)$ i, per tant, satisfan el sistema d'equacions donat per

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0$$

La solució del sistema és

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2} \qquad \text{i} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x} \\ \text{on} \qquad \bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \text{i} \qquad \bar{y} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \end{array}}$$

La recta caracteritzada per aquests paràmetres a i b, s'anomena **recta de regressió.**

És possible també determinar si la recta trobada és "bona" o no (en el sentit que ajusti bé els punts experimentals (x_i, y_i). Per això es calcula el **coeficient de correlació** com

$$\boxed{r = |a| \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N\overline{y}^2} \right]^{1/2}}$$

Es pot demostrar que 0 < r < 1. Quan r està prop de 1 l'ajust és molt bo; quan està prop de 0 és un desastre. Per tal de fixar una referència direm que per sota r = 0.8 l'ajust és dolent, és a dir, els punts experimentals no s’ajusten bé a una recta

7. Resum per calcular errors

En els **aparells analògics** es considera que l'error de resolució és igual a la meitat de la diferència entre dos valors consecutius de l'escala.

En els **aparells digitals** es considera que l'error de resolució és igual a una unitat en l'últim dígit.

El resultat de la mesura s'acostuma a escriure $\boxed{x \pm \varepsilon_x}$

on x indica el resultat de la magnitud mesurada que es considera millor i ε_x és un nombre real positiu (amb les mateixes unitats que x) anomenat **error absolut**.

L'**error relatiu** d'una determinada magnitud es defineix com $\boxed{e_x = \frac{\varepsilon_x}{|x|}}$

L'error estimat de $z(x)$, és $\boxed{\varepsilon_z = \varepsilon_z(x) = \left|\frac{dz}{dx}\right|\varepsilon_x}$

Exemples: $\boxed{z = ax \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = |a|\varepsilon_x = |z|e_x}$

$$\boxed{z = \frac{a}{y} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = \left|\frac{-a}{y^2}\right|\varepsilon_y = |z|e_y}$$

L'error estimat de $z(x,y)$, $\boxed{\varepsilon_z = \sqrt{\varepsilon_z^2(x) + \varepsilon_z^2(y)}}$

és la mitjana quadràtica de l'error que produiria x, $\varepsilon_z(x)$, i el que produiria y, $\varepsilon_z(y)$, suposant que l'altra variable és constant.

Exemple: $z = ax \pm by \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = \sqrt{\varepsilon_z^2(x) + \varepsilon_z^2(y)} = \sqrt{(a\varepsilon_x)^2 + (b\varepsilon_y)^2}$

En el cas de les magnituds que s'expressen com productes i quocients

$$\boxed{z = bxy \quad \text{o} \quad z = bx/y \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = \sqrt{\varepsilon_z^2(x) + \varepsilon_z^2(y)} = |z|\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}$$

L'ERROR S'APROXIMA PER EXCÉS a una o dues xifres significatives.

EL VALOR DE LA MAGNITUD MESURADA S'ARRODONEIX, de manera que l'última xifra significativa sigui del mateix ordre que la d'ordre més baix a l'error

Exemples de l'expressió correcta del resultat d'una mesura:

Magnitud	Error	Expressió correcta
2.5483	1.3458	2.5 ± 1.4
3458.9353	57.763	3459 ± 58
67.8295	0.0276	67.830 ± 0.028
98657320.6	247000	$9866\times10^4 \pm 25\times10^4$
809.4563	0.0298	809.456 ± 0.030

Al laboratori expressarem els errors amb 2 xifres significatives (com a l'exemple).