PROPAGACIÓ I INTERFERÈNCIA D’ONES

Abans d'anar al laboratori

1 - Estudieu l'apartat 1 sobre el fonament teòric d'aquesta pràctica.

2 - Resoleu els exercicis previs plantejats a l'apartat 2. La resolució l'haureu de lliurar al professor del laboratori a l'inici de la pràctica.

3 - Llegiu i els apèndixs B, C, D i E sobre el funcionament del polímetre i l'oscil·loscopi, i de com fer una regressió lineal amb l’Excel.

Objectius:

a) Comprovar que les ones sonores són **esfèriques**.

b) Estudiar el fenomen de la **interferència**.

c) Mesurar la **velocitat del so**.

1. Fonament teòric

1.1 Introducció

Una ona és una **pertorbació** amb la qual es transmet **energia** i **quantitat de moviment sense transport de matèria**. La pertorbació pot ser una variació periòdica o no periòdica d’una determinada propietat, com l’elongació dels punts d’una corda (en el cas d’ones a una corda), o els canvis de pressió (en el cas del so), o els camps elèctrics i magnètics (pel cas d’ones electromagnètiques). Les ones a les quals els cal un **medi material** per propagar-se s’anomenen **mecàniques**. El so, que n’és un exemple, es propaga per l’aire o l’aigua o qualsevol altre medi, com a resultat de les seves propietats elàstiques. En canvi les ones electromagnètiques, que no ho són, es poden propagar en el buit.

Si la pertorbació inicial es repeteix cíclicament les ones són **periòdiques** i si, a més, ho fa segons un moviment harmònic simple les ones s’anomenen **harmòniques**. Segons el nombre de dimensions en que es propaga l’energia les ones es classifiquen en: **unidimensionals, bidimensionals i tridimensionals**. El so i la llum són exemples d’ones tridimensionals. Segons la relació entre la direcció de propagació i la de les vibracions produïdes per la pertorbació les ones es classifiquen en: **transversals** (les direccions són perpendiculars, com les ones a una corda o les electromagnètiques) i **longitudinals** (les direccions són paral·leles, com les ones sonores).

1.2 Funció d’ona

És una **expressió** matemàtica que descriu els efectes d’una **pertorbació** en l’**espai** i en el **temps**. Pel cas d’ones sonores la funció d’ones indica variacions de pressió. Els fenòmens ondulatoris es regeixen per una equació en derivades parcials de segon grau anomenada **equació d’ones**. Pel cas d’una ona unidimensional, que es propaga segons l’eix x a velocitat constant v i sense canvi de forma, l’equació d’ones és:

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2},$$

on $\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}$ són les derivades parcials segones de la funció d'ones $\Psi(x,t)$ respecte les variables x i t. La solució més general d'aquesta equació és qualsevol funció que tingui per arguments ($x+vt$) o ($x-vt$). Així, la funció $\Psi(x,t) = f(x - vt)$ descriu una ona que es desplaça cap a valors de $x>0$, mentre que la funció $\Psi(x,t) = f(x + vt)$ descriu una ona que es desplaça cap a valors de $x<0$. Pel cas d'una **ona harmònica** la funció d'ona és:

$$\Psi(x,t) = A\sin[k(x \pm vt) + \delta],$$

on A és l'**amplitud**. L'argument $[k(x \pm vt) + \delta]$ és la **fase**, i δ la **fase inicial** (o constant de fase), que depèn de les condicions inicials. La **longitud d'ona** λ és la distància entre dos màxims o dos mínims consecutius. El **període** T és el temps que triga l'ona en recórrer una distància igual a la longitud d'ona. La **freqüència**, que és el nombre de vibracions completes per unitat de temps, és la inversa del període $f = 1/T$, que al SI s'expressa en Hertz (Hz) o s^{-1}. La freqüència, la longitud d'ona i la velocitat de propagació v estan relacionades per l'expressió:

$$v = \lambda f. \tag{1}$$

Definint el nombre d'ones $k = 2\pi/\lambda$ i la freqüència angular o pulsació $\omega = 2\pi f$, l'expressió de la funció **d'ones planes harmòniques unidimensionals** és:

$$\Psi(x,t) = A\sin[kx \pm \omega t + \delta].$$

1.3 Ones planes i esfèriques

Un **front d'ona** és una superfície imaginària formada pel conjunt de punts que tenen la mateixa fase i que són **perpendiculars a la direcció de propagació.** L'expressió anterior, amb una amplitud A constant, descriu una ona que es propaga segons l'eix x amb fronts d'ona que són superfícies planes i que, per tant, anomenem **ones planes**. Malgrat que en molts casos l'aproximació d'ones planes es considera com una bona suposició, si la pertorbació s'origina en un **punt** o focus puntual, i es propaga **uniformement** (isotròpicament) en les **tres dimensions**, és més adequat suposar que els **fronts d'ones són superfícies esfèriques** de radi r igual a la distància del focus al punt afectat per la pertorbació. A mesura que l'ona es propaga, r i l'àrea de les superfícies esfèriques dels fronts d'ona augmenta i, d'acord amb el principi de conservació de l'energia, **l'amplitud és inversament proporcional a *r***. Per tant, l'expressió de la funció d'una **ona harmònica esfèrica** és:

$$\Psi(r,t) = \frac{A}{r}\sin[kr \pm \omega t + \delta]. \tag{2}$$

1.4 Interferències

La interferència és un **fenomen típicament ondulatori**, que es basa en el **principi de superposició**, que afirma que la funció d'ona resultant, en qualsevol punt i instant de temps, és la suma algebraica de les funcions d'ona de les ones que se superposen.

1.4.1 Interferència de dos emissors en línia.

Malgrat que l'aproximació d'ones esfèriques és més realista que la de les ones planes, a fi de simplificar el formalisme matemàtic, **suposarem que les ones són planes**. Aquesta aproximació serà més bona com menor sigui l'expressió $(x_1-x_2)/x_2$.

Així, pel cas dels dos emissors en línia que es mostren a la figura 1, i que emeten ones **harmòniques planes**, de la **mateixa amplitud**, **longitud d'ona, freqüència** i **fase inicial δ** (i que per tant són coherents), les funcions d'ona de cada emissor Ψ_1 i Ψ_2 en un punt P, que està en línia amb els dos emissors i a una distància x_1 del primer i x_2 del segon, són:

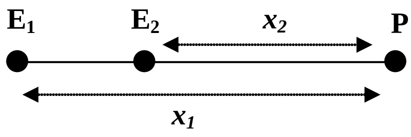

Figura 1

$$\Psi_1(x_1,t) = A\sin\phi_1 \;;\; \phi_1 = kx_1 - \omega t + \delta,$$

$$\Psi_2(x_2,t) = A\sin\phi_2 \;;\; \phi_2 = kx_2 - \omega t + \delta.$$

Pel principi de superposició la funció d'ona resultant Ψ al punt P és:

$$\Psi(x,t) = \Psi_1(x_1,t) + \Psi_2(x_2,t) = 2A\cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) =$$

$$= 2A\cos\left[\frac{k(x_1-x_2)}{2}\right]\sin\left[\frac{k(x_1+x_2)}{2} - \omega t + \delta\right].$$

L'equació anterior indica que l'ona resultant es propaga com si recorregués la distància mitjana entre x_1 i x_2, amb una amplitud:

$$2A\cos\left[\frac{k(x_1-x_2)}{2}\right].$$

Pel cas d'ones sonores la funció d'ona descriu les variacions de la pressió, però el que es detecta experimentalment és la **intensitat** I, que és proporcional a **l'amplitud al quadrat**:

$$I \propto 4A^2\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 4A^2\left(\frac{1+\cos\Delta\phi}{2}\right) = 2A^2(\,1+\cos\Delta\phi).$$

La diferència de fase $\Delta\phi$ és deguda a la **diferència de camins $\Delta x = x_2 - x_1$** recorreguts per les dues ones emeses

$$\Delta\phi = k(x_1-x_2) = k\Delta x = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}.$$

La intensitat al punt P és nul·la (**interferència destructiva**) si:

$$\cos\Delta\phi = -1 \;\rightarrow\; \Delta\phi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = (2n+1)\pi \;\rightarrow\; \Delta x = \frac{2n+1}{2}\lambda \quad;\; n = 0,1,2,\ldots$$

La intensitat és màxima $I = 4A^2$ (**interferència constructiva**) si:

$$\cos\Delta\phi = 1 \;\rightarrow\; \Delta\phi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = 2n\pi \;\rightarrow\; \Delta x = n\lambda\,;\; n = 0,1,2,\ldots$$

Així, per exemple, si el segon emissor es mou i el primer està en repòs, al punt P s'observa una alternança d'interferències constructives i destructives. Si x_{2n} i x_{2m} són les posicions del segon emissor quan al punt P s'observen respectivament els màxims d'ordre "n" i "m", tenim:

$$x_{2n} - x_1 = n\lambda,\; x_{2m} - x_1 = m\lambda \;\Rightarrow\; x_{2m} - x_{2n} = (m-n)\lambda.$$

Per tant, a partir de les posicions del segon emissor, quan la interferència és constructiva, es pot calcular la **longitud d'ona**:

$$\lambda = \frac{x_{2m} - x_{2n}}{m-n}. \qquad (3)$$

1.4.2 Interferència de dos emissors.

Si com es mostra a la figura 2, els dos emissors estan separats una distància d i el punt P dista r_1 del primer emissor i r_2 del segon, les funcions d'ona són:

$$\Psi_1(r_1, t) = A \sin \phi_1 \ ; \ \phi_1 = kr_1 - \omega t + \delta,$$
$$\Psi_2(r_2, t) = A \sin \phi_2 \ ; \ \phi_2 = kr_2 - \omega t + \delta.$$

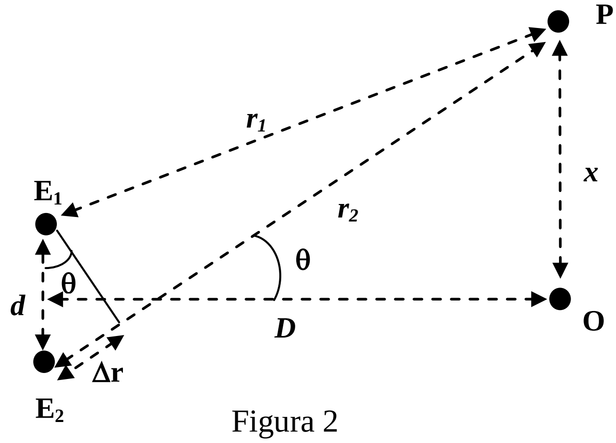

Figura 2

Si O és el punt de la vertical del punt P, que anomenarem eix x, que dista menys dels dos emissors, d'acord amb la figura 2, les distàncies del punt O als emissors i a P són respectivament D i x. Per tant, les distàncies r_1 i r_2 es poden expressar en termes de d, D i x. Com en el cas anterior, la intensitat total al punt P depèn de la diferència de fase $\Delta\phi$, que ara és deguda a la diferència de **camins** $\Delta r = r_2 - r_1$ recorreguts per les dues ones. Per tant, $\Delta\phi$ és:

$$\Delta\phi = k(r_2 - r_1) = k\Delta\mathrm{r} = 2\pi\Delta r/\lambda.$$

En un punt de l'eix x s'observarà **interferència destructiva** si:

$$\cos\Delta\phi = -1 \rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi\Delta r}{\lambda} = (2n+1)\pi \rightarrow \Delta\mathrm{r} = \frac{2n+1}{2}\lambda; \ \ n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

La **interferència** serà **constructiva** si:

$$\cos\Delta\phi = 1 \ \rightarrow \ \Delta\phi = \frac{2\pi\Delta r}{\lambda} = 2n\pi \ \ \rightarrow \ \Delta\mathrm{r} = n\lambda \,; \ \ n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

Si $D>>d$ i $D>>x$ la diferència de camins és $\Delta r \cong d\sin\theta \cong d\tan\theta = xd/D$. Per tant, hi haurà interferència **destructiva** si:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta r}{\lambda} = \frac{2\pi dx}{\lambda D} = (2n+1)\pi \ \ \ \rightarrow \ x = \frac{(2n+1)\lambda D}{2d}; \ \ n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

i **constructiva**, quan:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta r}{\lambda} = \frac{2\pi dx}{\lambda D} = 2n\pi \ \ \rightarrow x = \frac{n\lambda D}{d}; \ \ n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

El perfil d'interferències, que es mostra a la figura 3, es caracteritza per la presència d'un **màxim d'ordre** $n = 0$ o **principal,** localitzat al punt O, i de màxims **d'ordre superior** $n = 1,2,3,...$ o **secundaris** disposats simètricament al seu voltant. És a dir: $x_0 = 0$ i $x_1 = \lambda D/d$.

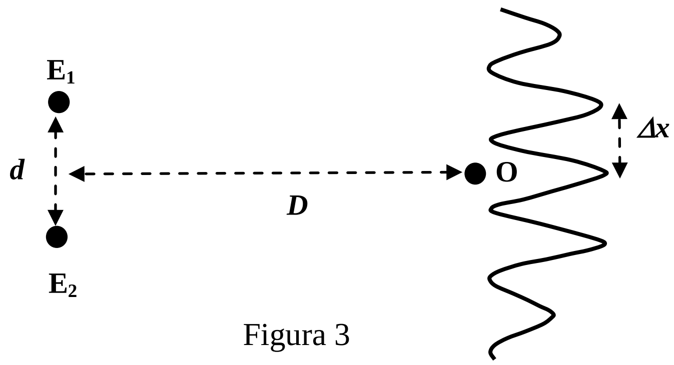

Figura 3

Per tant, a partir de la distància Δx entre les posicions dels màxim central x_0 i el primer màxim secundari x_1, la separació d entre els dos emissors i la distància D, es pot determinar la longitud d'ona λ :

$$\Delta x = x_1 - x_0 = \lambda D/d \rightarrow \lambda = d\Delta x/D. \quad (4)$$

1.5 Ultrasons

Els ultrasons són **ones acústiques** de freqüències **superiors a les màximes audibles** (f > 20 kHz). Per generar-les i detectar-les s'utilitzen transductors electroacústics que, en l'etapa d'emissió, converteixen energia elèctrica en acústica i en la de detecció realitzen l'operació inversa. La majoria d'ells es basen en el fenomen de la **piezoelectricitat**, que és la capacitat de certs cristalls de generar una diferència de potencial quan se'ls sotmet a una deformació mecànica. L'efecte és reversible i, per tant, els materials piezoelèctrics s'expandeixen o es contreuen quan se'ls aplica una diferència de potencial.

Els emissors que utilitzarem en aquest pràctica vibren i, per tant, emeten ones sonores quan se'ls aplica una tensió alterna. De manera inversa, als receptors s'indueixen diferències de potencial alternes quan sobre ells incideixen les ones acústiques. Els ultrasons tenen moltes aplicacions industrials, entre les que podem destacar: la mesura de distàncies, la detecció d'objectes, els sonars dels vaixells i el diagnòstic mèdic per ecografia.

2 Exercicis previs

2.1 Esfericitat de les ones sonores

r (cm)	V_{pp} (V)
4	7.2
6	4.6
8	3.4
10	2.8
12	2.3
14	2
16	1.7
18	1.5
20	1.4
22	1.3
24	1.2

En un experiment dissenyat per demostrar que les ones sonores són esfèriques s'utilitza un emissor i un receptor d'ultrasons, que estan connectats respectivament a un generador de funcions i a un oscil·loscopi. Amb el generador de funcions s'aplica un senyal sinusoïdal d'una freqüència igual a la de ressonància del sistema emissor-receptor, de forma que a l'oscil·loscopi s'observa un senyal sinusoïdal d'aquesta freqüència amb una tensió pic a pic V_{pp}. Per demostrar l'esfericitat es mesura V_{pp} en funció de la distància r entre l'emissor i el receptor.

D'acord amb la fórmula (2), si les ones són esfèriques, la dependència serà del tipus: $V_{pp}=V_{pp0}(r_0/r)^{\alpha}$, on r_0 és la primera distància considerada, $V_{pp0} = V_{pp}(r_0)$ i α és un paràmetre adimensional que val 1 si les ones són esfèriques. L'expressió anterior es pot linealitzar aplicant logaritmes a ambdós costats de l'equació:

$$\ln\left(V_{pp}/V_{pp0}\right) = \alpha \ln(r_0/r) + b,$$

que correspon a una recta de pendent α amb un terme independent b nul.

A partir dels valors de la taula adjunta, calculeu el logaritme de les quantitats $\ln(V_{pp}/V_{pp0})$ i $\ln(r_0/r)$, i feu una regressió lineal aplicant la metodologia que s'explica a la pràctica 0 (si utilitzeu l'Excel consulteu l'apèndix D). Determineu els valors de α i el coeficient de correlació de la recta, i comproveu que el terme independent b és quasi nul.

2.2 Interferència de dos emissors

En un experiment d'interferència amb dos emissors d'ultrasons, situats com s'indica a la figura 2, que emeten un senyal coherent de 40 kHz i que estan separats una distància d = 6 cm, s'observa que el màxim d'ordre 0 està situat a una distància D = 40 cm dels dos emissors. Si els dos màxims d'ordre 1 estan distribuïts simètricament, i a unes distàncies x_1 = 5.6 cm i x_2 = 5.5 cm del màxim central, determineu la longitud d'ona i la velocitat dels ultrasons utilitzant les fórmules (4) i (1). Per calcular la distància Δx entre el màxim central i els secundaris d'ordre 1 feu la mitjana dels valors x_1 i x_2.

3 Procediment de mesura

3.1 Comproveu que al vostre lloc de treball hi ha:

- 1 connector en forma de T.
- 1 adaptador BNC-banana.
- 1 cable BNC-BNC.
- 1 tauler amb tres regles graduats.
- 1 generador de funcions.
- 1 oscil·loscopi de doble canal.
- 1 polímetre.
- 2 emissors i 1 receptor d'ultrasons.

MOLT IMPORTANT !!! A fi de que les ones emeses pels vostres generadors d'ultrasons no afectin els resultats obtinguts pels companys, cal que orienteu els emissors de manera que emetin en direcció a vosaltres.

3.2 Determinació de la freqüència de treball

1. Connecteu el cable BNC-BNC de la sortida de 50 Ω del generador de funcions a l'entrada del canal I de l'oscil·loscopi. Poseu en marxa el generador de funcions i l'oscil·loscopi, seleccionant per aquest últim una base de temps de 5 μs/div i un coeficient de deflexió pel canal I de 5 V/div. Utilitzeu els controls del generador de funcions per aplicar un senyal sinusoïdal de 40 kHz de freqüència, i amb el botó *amplitude*, ajusteu l'amplitud del senyal fins que a l'oscil·loscopi observeu una tensió pic a pic V_{pp}**= 20 V**. **No modifiqueu l'amplitud** en tota la pràctica.

2. Situeu un dels emissors davant del receptor i separeu-los 4 cm.

3. Traieu el cable BNC-BNC i connecteu l'emissor al generador de funcions i el receptor al canal I de l'oscil·loscopi.

4. L'emissor i el receptor són sistemes ressonants, i només funcionen a l'entorn d'una determinada freqüència, que en el nostre cas és d'uns 40 kHz. Seleccioneu un coeficient de deflexió pel canal I de l'oscil·loscopi de 2 V/div i modifiqueu lleugerament la freqüència del generador de funcions fins que l'amplitud del senyal a

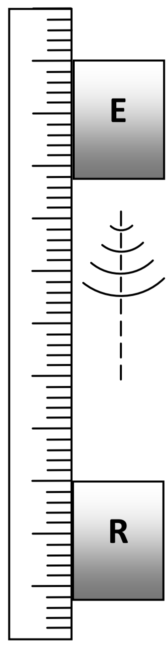

Figura 4

l'oscil·loscopi sigui màxima. Aquesta serà la **freqüència** de treball i, per tant, **tampoc l'heu de modificar** en tota la pràctica.

5. Anoteu el valor de la **freqüència** que indica la pantalla del generador de funcions.

3.3 Esfericitat de les ones sonores

En aquest apartat estudiarem com disminueix V_{pp} a mesura que augmentem la distància r entre l'emissor i el receptor. Cal dir que, com que l'atenuació deguda a l'absorció per l'aire a les distàncies considerades en aquesta pràctica (com a molt 24 cm) és negligible, la dependència de V_{pp} amb r és la deguda al caràcter esfèric de les ones. Per estudiar-ho, mantingueu el muntatge anterior i procediu tal com s'indica:

1. Moveu el receptor respecte l'emissor en intervals de 2 cm, començant per una distància relativa r = 4 cm i acabant amb una de 20 cm. En cada cas seleccioneu el coeficient de deflexió de l'oscil·loscopi més adequat per mesurar V_{pp}.

2. D'acord amb la fórmula (2), la dependència de V_{pp} amb r és del tipus: $V_{pp}=V_{pp0}(r_0/r)^{\alpha}$, on r_0 és la primera distància relativa considerada, $V_{pp0} = V_{pp}(r_0)$ i α és un paràmetre adimensional que és 1 si les ones són esfèriques. L'expressió anterior es pot linealitzar aplicant logaritmes a ambdós costats de l'equació: $\ln(V_{pp}/V_{pp0}) = \alpha \ln(r_0/r)$. Aquesta és l'equació d'una recta de pendent α i terme independent b nul.

3. Feu una taula amb els valors de r i V_{pp} en un full Excel i afegiu dues noves columnes amb els valors de $\ln(r_0/r)$ i $\ln(V_{pp}/V_{pp0})$. Amb aquests valors feu una regressió lineal d'acord amb l'expressió:

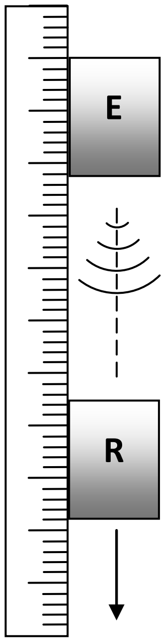

Figura 5

$$\ln\left(V_{pp}/V_{pp0}\right) = \alpha \ln(r_0/r) + b,$$

aplicant la metodologia que s'indica a l'apèndix D. **Determineu els valors de α i el coeficient de correlació** de l'ajust, i comproveu que el terme independent b és quasi nul.

3.4 Interferència de dos emissors en línia

1. Afegiu al muntatge anterior el segon emissor E2 que, com s'indica a la figura, situareu entre el primer emissor E1 i el receptor R. Connecteu simultàniament els dos emissors a la sortida de 50 Ω del generador de funcions amb un connector en forma de T.

2. Moveu els tres elements de forma que la distància relativa entre E1 i R sigui de 30 cm i entre E2 i R de 20 cm.

3. Utilitzeu un coeficient de deflexió pel canal I de l'oscil·loscopi de 1 o 0.5 V/div en funció de la posició de E2.

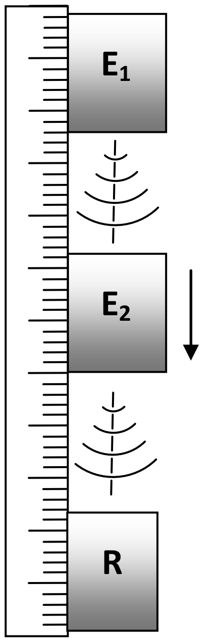

Figura 6

4. Observeu que, si moveu R, el senyal a l'oscil·loscopi decreix o augmenta monòtonament, mentre que si moveu un dels emissors veureu alternança d'interferència constructiva i destructiva. En realitat les interferències no són totalment destructives i constructives, ja que com que les ones són esfèriques l'amplitud del senyal de l'emissor més proper al receptor és més gran que la del receptor més llunyà.

5. Retorneu a la disposició inicial de forma que les distàncies relatives entre els emissors i el receptor siguin respectivament de 30 i 20 cm. Moveu E2 fins que el senyal a l'oscil·loscopi sigui màxim i, utilitzant el regle, anoteu la seva posició (x_0).

6. Continueu apropant E2 al receptor fins que el senyal torni a ser màxim. Apropeu-lo de nou fins que torni a ser màxim de nou. Repetiu aquest procés n vegades ($10 < n < 15$) i anoteu l'última posició (x_n).

7. **Determineu** la **longitud d'ona** i la **velocitat del so** utilitzant respectivament les fórmules (3) i (1).

3.5 Interferència de dos emissors

1. **Mesureu la longitud *d*** del costat més petit de la base d'un del emissors amb un dels regles del muntatge.

2. Poseu E1 i E2 tal com s'indica a la figura 7, de manera que estiguin situats simètricament respecte la divisió x = 15 cm, les seves bases toquin el regle 1 i contactin entre elles. Com es pot observar la distància entre els dos emissors és la longitud d que heu mesurat anteriorment.

3. Desconnecteu el receptor de l'oscil·loscopi i connecteu-lo al multímetre, que fareu funcionar com a voltímetre de corrent altern, utilitzant un adaptador BNC-banana.

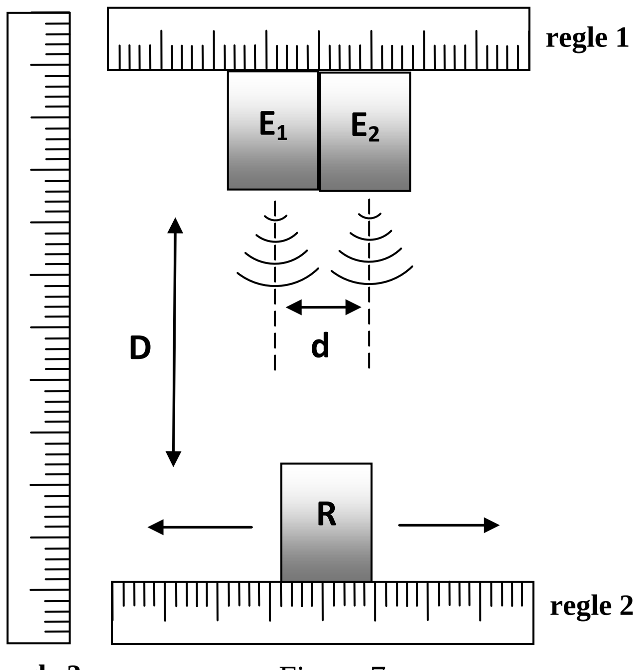

Figura 7

4. Situeu R a una distància D dels dos emissors, de forma que pugui lliscar sobre el regle 2.

5. Moveu E1 i R fins que toquin el regle 3 i **mesureu la distància *D*** entre els emissors i el receptor. Retorneu E1 a la posició inicial, de forma que les bases dels emissors contactin.

6. Desplaceu R paral·lelament al regle 2 en intervals de 0.5 cm, i per cada posició y mesureu el valor eficaç de la tensió V_{ef}. Introduïu cada valor (x,V_{ef}) en un full Excel.

7. Acabat el procés de mesura, representeu gràficament amb l'Excel totes les dades i determineu els valors de y pels màxims central x_0 i els dos secundaris d'ordre 1 x_1 i x_2.

8. La distància Δx entre el màxim central i el primer màxim secundari, que apareix a la fórmula (4), la calcularem a partir de la meitat de la distància entre els dos màxims secundaris $|x_2 - x_1|/2$.

9. A partir dels valors de Δx, D i d, determinats anteriorment, **calculeu la longitud d'ona λ,** aplicant la fórmula (4). Compareu aquest valor amb l'obtingut a l'apartat 3.3.

Propagació i interferència d'ones

Determinació de la freqüència de treball

f =

Esfericitat de les ones sonores

r (cm)	4	6	8	10	12	14	16	18	20
V_{pp} (V)									

⇓

α =
Coeficient de correlació r =

Interferència de dos emissors en línia

x_0 =
x_n =
n =

⇒

$\lambda = \|x_n - x_0\|/n$ =
$v = \lambda f$ =

Interferència de dos emissors

x_0 =
x_1 =
x_2 =

d =
D =

$\Delta x = \|x_2 - x_1\|/2$ =

$\lambda = d\Delta x/D$ =